Úvod do kvantového počítání

3. přednáška

Miroslav Dobšíček

Katedra počítačů, Fakulta elektrotechnická
České vysoké učení technické v Praze

31. března 2005

Část I

Přehled z minulé hodiny

Co je to qubit?

Kvantový bit - qubit

Obecný tvar:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Qubit žije v Hilbertově prostoru H_2.
- $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ tvoří bázi prostoru.
- Evoluce kvantového systému je unitární.
- Měření způsobuje kolaps qubitu na jeden z bázových vektorů.
- α a β jsou komplexní amplitudy.

Kvantový bit - qubit

Obecný tvar:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Qubit žije v Hilbertově prostoru H_2.
- $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ tvoří bázi prostoru.
- Evoluce kvantového systému je unitární.
- Měření způsobuje kolaps qubitu na jeden z bázových vektorů.
- α a β jsou komplexní amplitudy.

Kvantový bit - qubit

Obecný tvar:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Qubit žije v Hilbertově prostoru H_2.
- $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ tvoří bázi prostoru.
- Evoluce kvantového systému je unitární.
- Měření způsobuje kolaps qubitu na jeden z bázových vektorů.
- α a β jsou komplexní amplitudy.

Co je to qubit?

Kvantový bit - qubit

Obecný tvar:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Qubit žije v Hilbertově prostoru H_2.
- $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ tvoří bázi prostoru.
- Evoluce kvantového systému je unitární.
- Měření způsobuje kolaps qubitu na jeden z bázových vektorů.
- α a β jsou komplexní amplitudy.

Co je to qubit?

Kvantový bit - qubit

Obecný tvar:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Qubit žije v Hilbertově prostoru H_2.
- $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ tvoří bázi prostoru.
- Evoluce kvantového systému je unitární.
- Měření způsobuje kolaps qubitu na jeden z bázových vektorů.
- α a β jsou komplexní amplitudy.

Co je to qubit?

Kvantový bit - qubit

Obecný tvar:

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

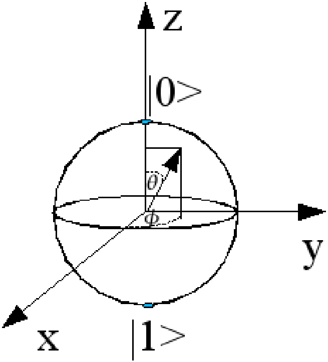
- Qubit žije v Hilbertově prostoru H_2.
- $B = \{|0\rangle, |1\rangle\}$ tvoří bázi prostoru.
- Evoluce kvantového systému je unitární.
- Měření způsobuje kolaps qubitu na jeden z bázových vektorů.
- α a β jsou komplexní amplitudy.

Část II

Dnešní přednáška

Převod do polárních souřadnic

$$|\phi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$$



Rotace okolo jednotlivých os

$$\mathrm{RotX}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -i\sin\frac{\theta}{2} \\ -i\sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{RotX}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} & -\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} & \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{RotX}(\theta) = \begin{pmatrix} e^{-i\theta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\theta/2} \end{pmatrix}$$

Obecný tvar unitární matice

$$U = e^{i\phi} \begin{pmatrix} e^{\frac{i}{2}(-\alpha-\beta)} \cos\frac{\theta}{2} & -e^{\frac{i}{2}(-\alpha+\beta)} \sin\frac{\theta}{2} \\ e^{\frac{i}{2}(\alpha-\beta)} \sin\frac{\theta}{2} & e^{\frac{i}{2}(\alpha+\beta)} \cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

Mixované stavy

Mixovaný stav

Mějme zdroj, který vytváří čistý stav $|\phi_i\rangle$ s pravěpodobností p_i.
O qubitu $[\phi\rangle$ z tohoto zdroje říkáme, že je v mixovaném stavu:

$$[\phi\rangle = (p_1, \phi_1) \oplus (p_2, \phi_2) \oplus \cdots \oplus (p_k, \phi_k).$$

Mixovaný stav se hodí pro popis neizolovaných systémů o kterých nemáme úplnou znalost.
Symbol $\oplus$ *slouží pouze pro oddělení jednotlivých čistých stavů.*

Densitní operátor

Každému mixovanému stavu odpovídá densitní operátor $\rho_{[\phi\rangle}$.
Pro stav $\rho_{[\phi\rangle} = \oplus_{i=1}^{k}(p_i, |\phi_i\rangle)$, kde $|\phi_i\rangle$ jsou čisté stavy platí:

$$\rho_{[\phi\rangle} = \sum_{i=1}^{k} p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i|.$$

Jednoznačnost

Přepis mixovaného stavu na densitní operátor není 1 : 1.
Přesto v sobě densitní operátor nese veškerou informaci potřebnou pro rozlišení dvou libovolných qubitů.

Míru ignorance vnořenou v mixovaném stavu lze vyjářit pomocí von Neumannovi entropie:

$$QS(\rho_{[\phi\rangle}) = -\mathrm{Tr}(\rho_{[\phi\rangle}) \lg \rho_{[\phi\rangle}$$

2-qubitový registr

2-qubitový registr

Tensorový součin dvou qubitů tvoří 2-qubitový registr.
Tensorový součin vektorů:

$$|x\rangle = (x_1, x_2)^T, \quad |y\rangle = (y_1, y_2)^T$$

$$|x\rangle \otimes |y\rangle = |x, y\rangle = |xy\rangle = (x_1 y, x_2 y)^T = (x_1 y_1, x_1 y_2, x_2 y_1, x_2 y_2)^T$$

Odpovídající Hilbertův prostor je $H_{2^2} = H_4$ s počtem bázových vektorů $2^2 = 4$.

Používané báze

Standardní

$$|0\rangle = |00\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = |01\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$|2\rangle = |10\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |3\rangle = |11\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Používané báze

Duální

$$|0'0'\rangle, \quad |0'1'\rangle, \quad |1'0'\rangle, \quad |1'1'\rangle$$

Bellovy

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle), \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$

Entanglované (propletené) stavy

Entanglované stavy

Pokud stav qubitového registru nelze rozložit na tenzorový součin jednotlivých qubitů, pak říkáme, že jsou v entanglovaném stavu.

- Takto vytvořená vazba neklesá s fyzickou vzdáleností qubitů od sebe.
- Dochází k porušení principu lokality.

n-qubitové registry

Pojmenování bází v binární soustavě:

$$|\phi\rangle = \sum_{i \in \{0,1\}^n} \alpha_i |i\rangle$$

Pojmenování bází v desítkové soustavě:

$$|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle$$

kde $\alpha_i \in C$ a $\sum \alpha_i = 1$.

Počet stavů systému

Je vidět, že počet stavů kvantového systému roste exponenciálně s fyzickou velikostí (tj. počtem použitých qubitů).

Kvantový paralelismus

... důsledek linearity

Unitární operace se aplikuje na všechny báze paralelně:

$$\mathrm{U}|\phi\rangle = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i |i\rangle = \sum_i \alpha_i \mathrm{U}|i\rangle$$

Operátory v prostoru H_{2^n}

- V prostoru H_{2^n} se používají unitární matice o velikosti $2^n \times 2^n$.
- Zpravidla se v jednom kroku aplikuje pouze jedno-dvou qubitový operátor na jeden-dva qubity; na zbytek se působí identitou.

Aplikace operátoru U na i-tý qubit:

$$U_n = \otimes_{k=0}^{i-1} I \otimes U \otimes \otimes_{k=i+1}^{n} I.$$

Tensorový součin matic:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \cdots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \cdots & a_{n,n}B \end{pmatrix}$$